

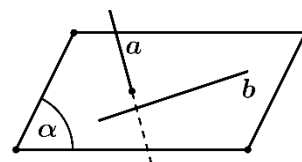
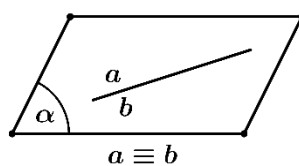
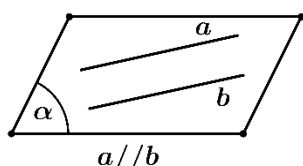
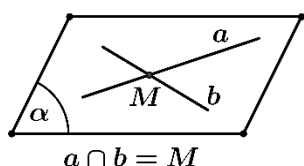
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.

Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b , hoặc b chéo với a .

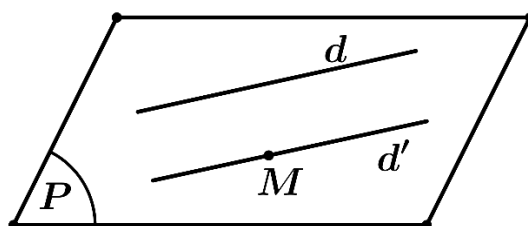


Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

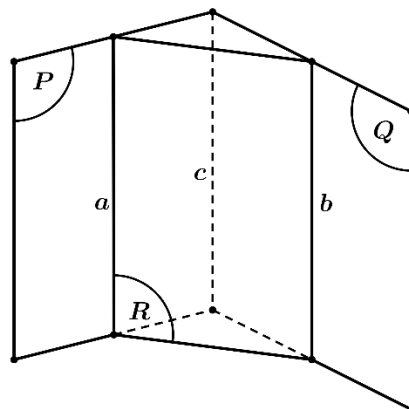
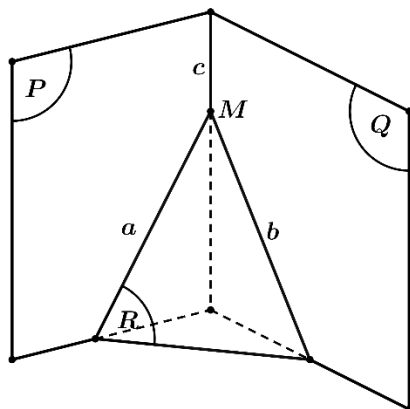
2 Tính chất của hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

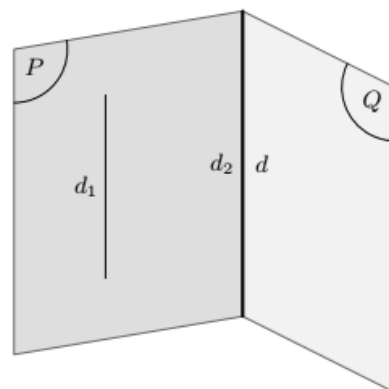
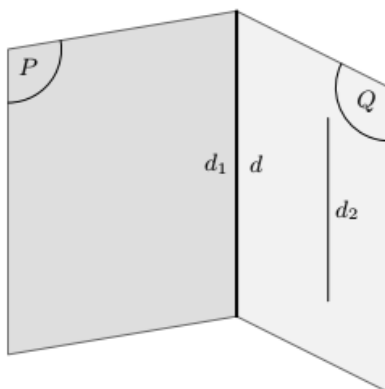
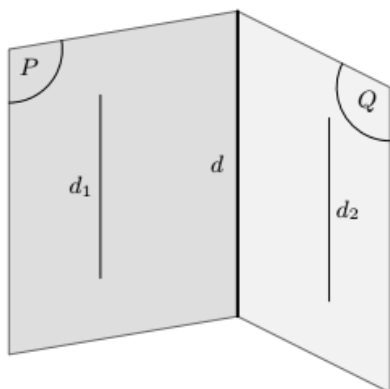


Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 3: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).



Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau:

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lý Ta-lét đảo,..)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a // b \\ a // c \Rightarrow b // c \\ b \neq c \end{cases}$$

- Áp dụng định lý về giao tuyến song song.
- Áp dụng hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

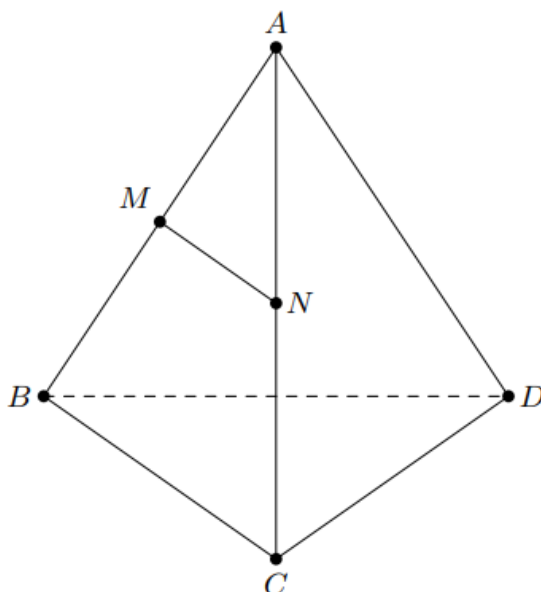
$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d' // d'' \end{cases} \Rightarrow d // d'', d // d'$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- MN và BC
- AN và CD
- MN và CD .

Lời giải



- Trong mặt phẳng (ABC) ta có MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$

b) Trong mặt phẳng (ACD) ta có AN cắt CD tại điểm C .

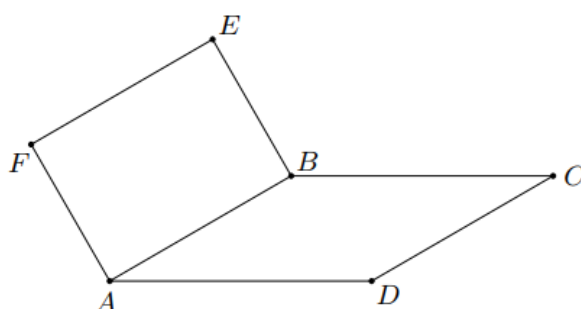
c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P) nên đường thẳng NC nằm trong (P) suy ra (P) chứa điểm A . Tương tự ta cũng có AM nằm trong (P) suy ra (P) chứa điểm B . Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$ (vô lý)

Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong cùng bất kỳ mặt phẳng nào suy ra MN chéo với CD .

Bài tập 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA . Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.

b) Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?

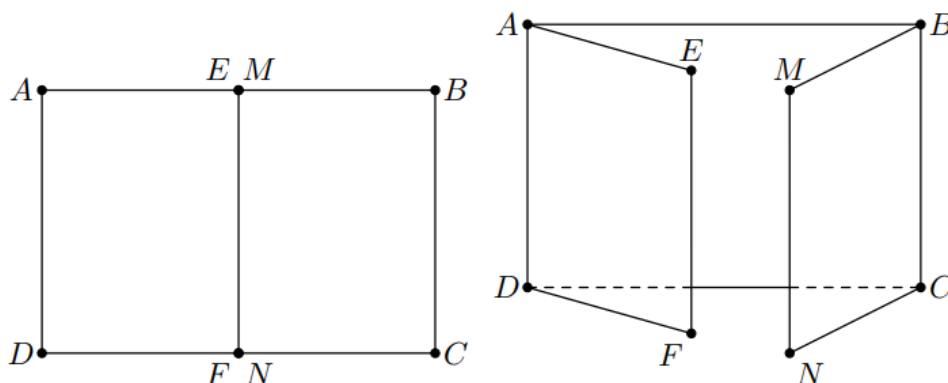


Lời giải

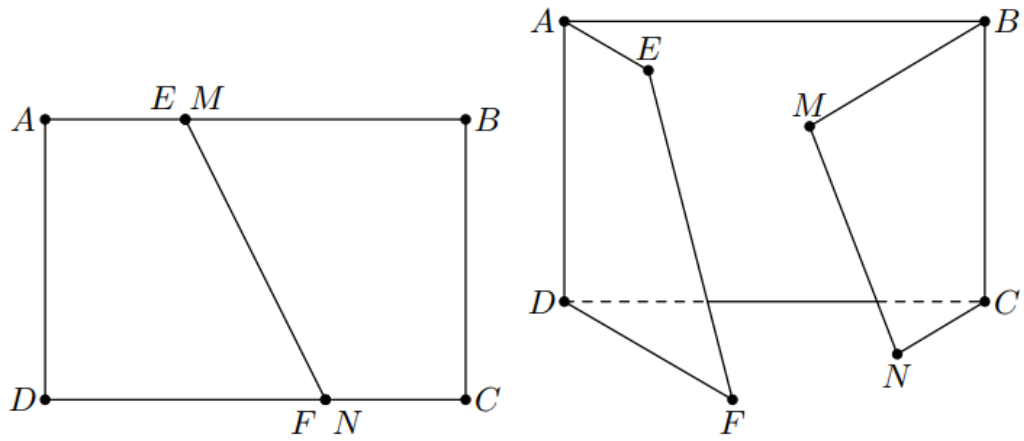
a) Các cặp đường thẳng cắt nhau là AB và BC, AB và DA, BC và CD, CD và DA . Các cặp đường thẳng song song là AB và CD, DA và BC .

b) Các đường thẳng AB, AF, BE cùng nằm trong mặt phẳng $(ABEF)$ nên trong ba đường thẳng đó không có hai đường thẳng nào chéo nhau.

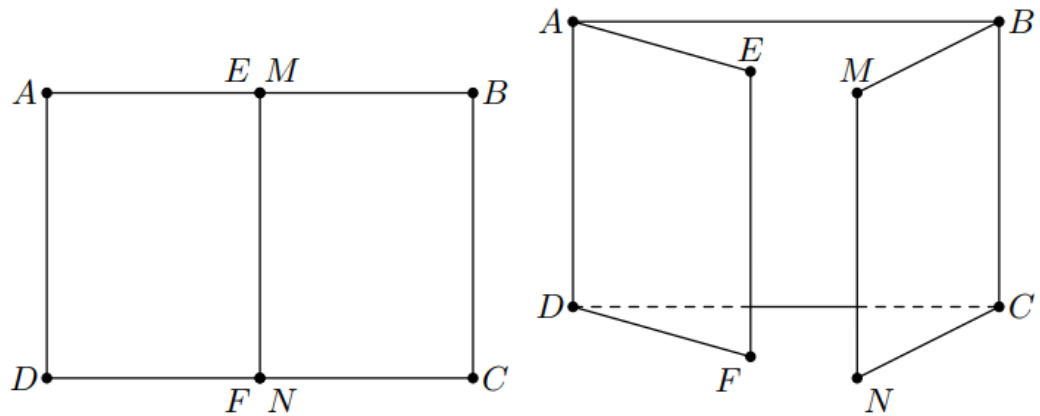
Bài tập 3: Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?



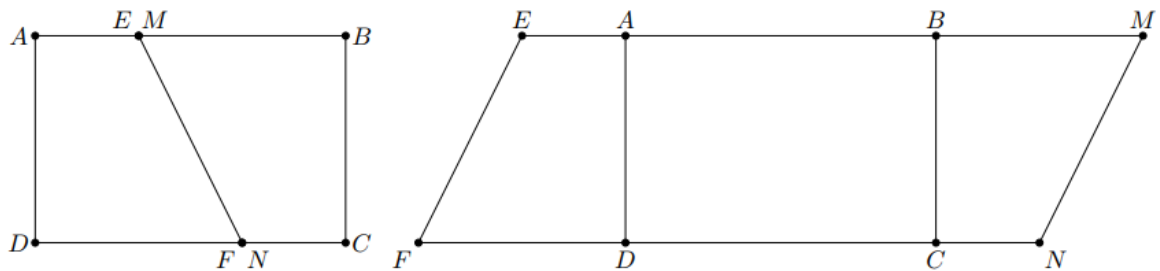
Lời giải



Ta có hai mép ngoài của cánh cửa sổ là EF và MN , hai cạnh bản lề của cánh cửa là AD và BC

Với 4 đường thẳng phân biệt AD, EF, MN, BC ta luôn có
$$\begin{cases} EF // AD \\ MN // BC \Rightarrow EF // MN \\ AD // BC \end{cases}$$

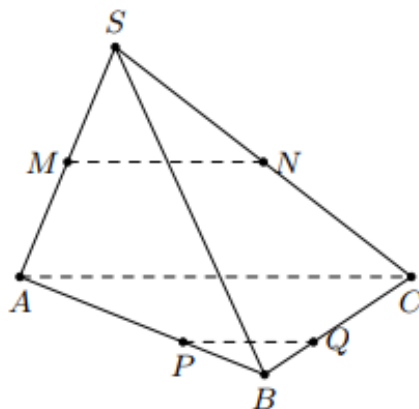
Điều này chứng tỏ hai mép ngoài của hai cánh cửa sổ hình chữ nhật luôn song song với nhau.



Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có một vị trí của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau, đó là khi mặt phẳng chứa mỗi cánh cửa trùng với mặt phẳng khung cửa sổ.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC sao cho $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN song song với PQ .

Lời giải

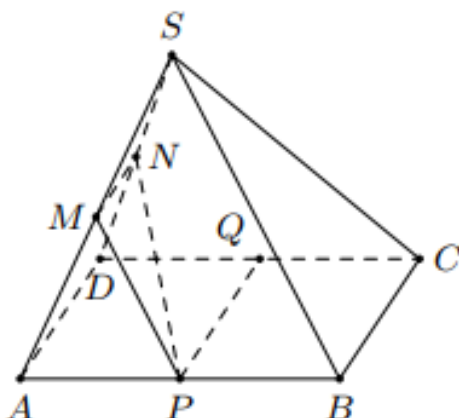


Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN // AC$.

Xét tam giác ABC có $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Theo định lí Ta-lét đảo ta có $PQ // AC$.

Từ (1) và (2) suy ra $MN // PQ$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD và P là một điểm nằm trên cạnh AB (P khác A và B). Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNP) tại điểm Q . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ .



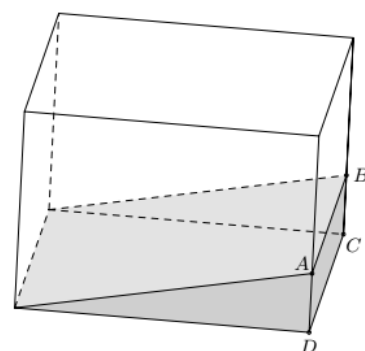
Lời giải

Ba mặt phẳng $(SAD), (ABCD), (MNP)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến AD, MN, PQ .

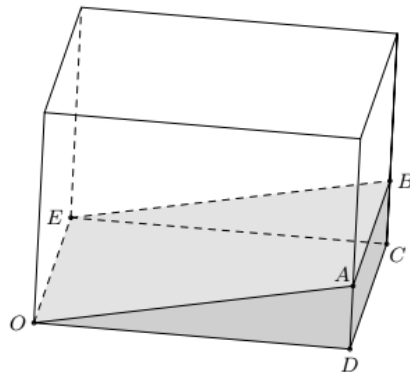
Trong tam giác SAD ta có MN là đường trung bình nên $MN // AD$ do đó theo định lí ta suy ra ba đường thẳng AD, MN, PQ đôi một song song.

Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ .

Bài tập 6: Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



Lời giải

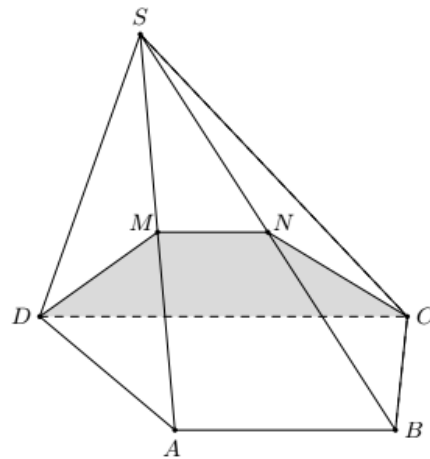


Ta có ba mặt phẳng lần lượt là $(ABEO)$, $(CDOE)$, $(ABCD)$ cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt AB, OE, CD .

Mặt khác: $OE \parallel CD$ nên $AB \parallel CD$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

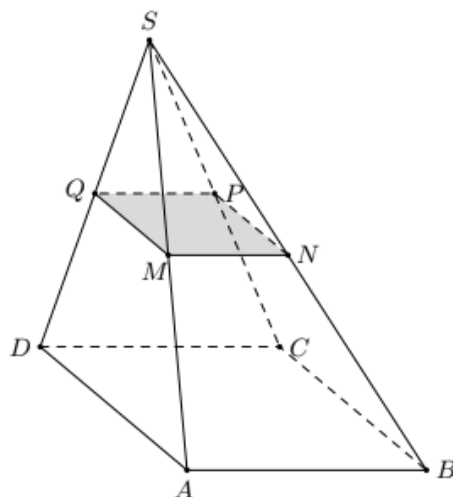
Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD$. Vậy tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải

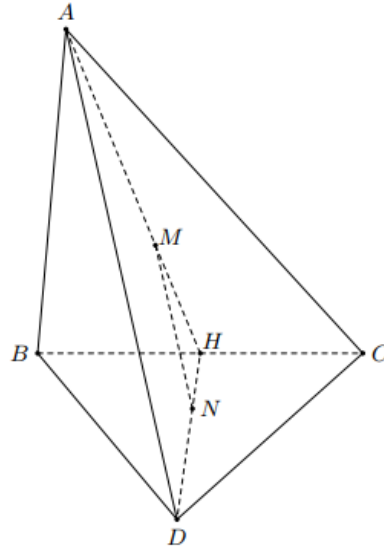


Ta có: $MN // AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$; $PQ // CD$ và $PQ = \frac{1}{2}CD$.

$AB // CD$ và $AB = CD \Rightarrow MN // PQ$ và $MN = PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Bài tập 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC . Chứng minh rằng $MN // AD$.

Lời giải

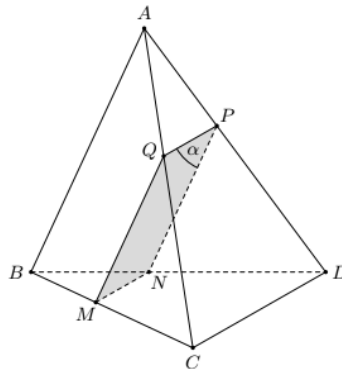


Gọi H là trung điểm của BC , ta có: $M \in AH, N \in DH$.

Do đó: $\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác) $\Rightarrow MN // AD$ (định lý Ta-lét đảo).

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC , (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB // (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB$. Tương tự ta có $NP // AB \Rightarrow MQ // NP$ (1).

Lại có $\begin{cases} CD // (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow MN // CD$. Tương tự ta có $PQ // CD \Rightarrow MN // PQ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
- B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
- C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải

A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.

B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải

Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
- D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải

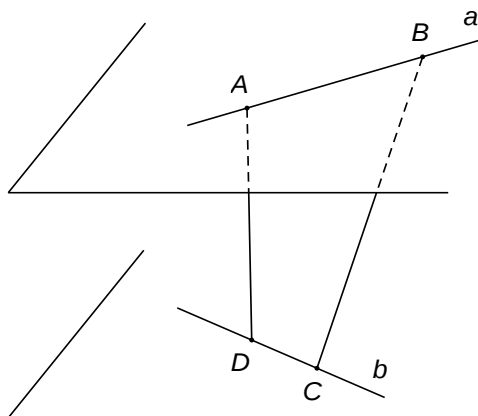
A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.

C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.

D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

- Câu 5:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?
- A. Có thể song song hoặc cắt nhau. B. Cắt nhau.
C. Song song với nhau. D. Chéo nhau.

Lời giải



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow a$ và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a; b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I .

Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow a$ và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

- Câu 6:** Cho ba mặt phẳng phân biệt (α) , (β) , (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :
- A. Đôi một cắt nhau. B. Đôi một song song.
C. Đồng quy. D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

- Câu 7:** Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :
- A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. B. Cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Chéo nhau hoặc song song. D. Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

- Câu 8:** Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.
B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Lời giải

Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b .

Câu 9: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a .

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c . Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c .

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d .

Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c .

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

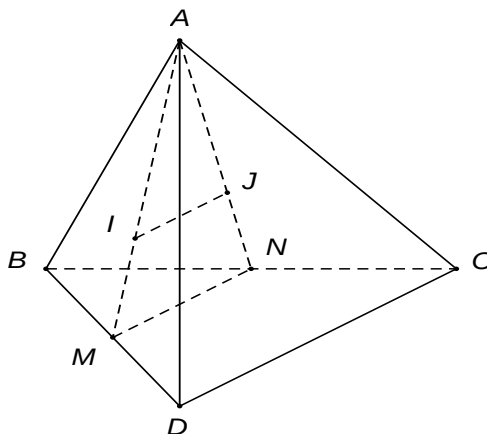
A. IJ song song với CD .

B. IJ song song với AB .

C. IJ chéo CD .

D. IJ cắt AB .

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \parallel CD$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

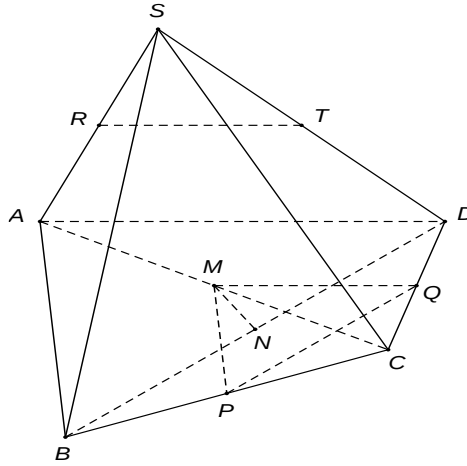
A. MP và RT .

B. MQ và RT .

C. MN và RT .

D. PQ và RT .

Lời giải



Ta có: M, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ \parallel AD$ (1)

Ta có: R, T lần lượt là trung điểm của SA, SD

$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT \parallel AD$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $MQ \parallel RT$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

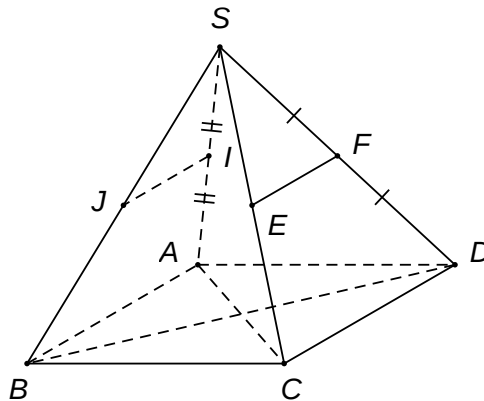
A. EF .

B. DC .

C. AD .

D. AB .

Lời giải



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\Rightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

Câu 13: Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

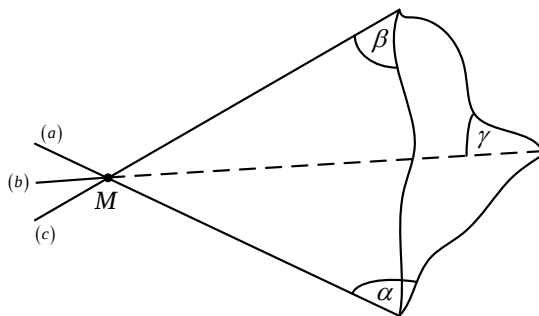
A. đồng quy.

B. tạo thành tam giác.

C. trùng nhau.

D. cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

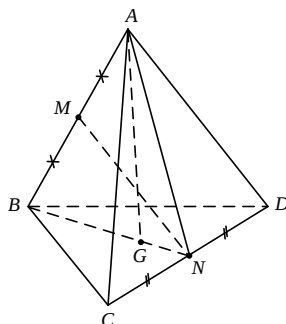


Đặt $(\alpha) \equiv (a; b)$; $(\beta) \equiv (a; c)$; $(\gamma) \equiv (b; c)$

Ta thấy, ba mặt phẳng $(\alpha); (\beta); (\gamma)$ cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt và ba giao tuyến $(a); (b); (c)$ đôi một cắt nhau nên chúng đồng quy tại M .

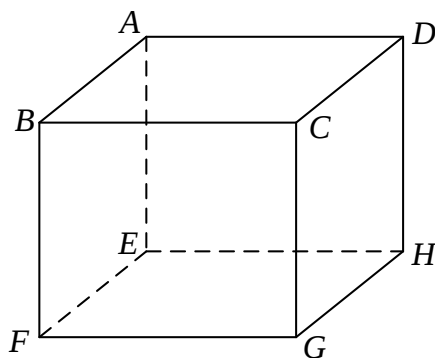
- Câu 14:** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đường thẳng AG cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?
A. MN . **B.** CM . **C.** DN . **D.** CD .

Lời giải



Do AG và MN cùng nằm trong mặt phẳng (ABN) nên hai đường thẳng cắt nhau.

- Câu 15:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



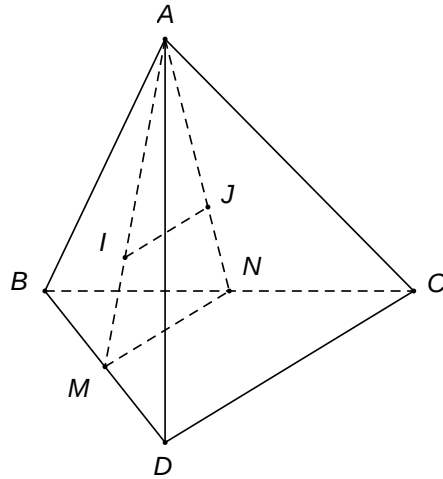
- A.** BG và HD chéo nhau. **B.** BF và AD chéo nhau.
C. AB song song với HG . **D.** CG cắt HE .

Lời giải

Do CG và HE không cùng nằm trong một mặt phẳng nên hai đường thẳng này chéo nhau.

- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Đường thẳng IJ song song với đường nào?
A. AB . **B.** CD . **C.** BC . **D.** AD .

Lời giải



Gọi N, M lần lượt là trung điểm của BC, BD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

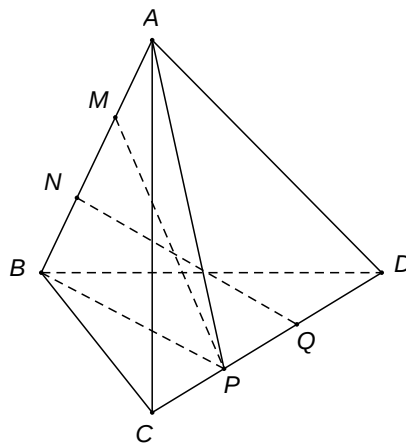
$J; I$ lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xác định vị trí tương đối của MQ và NP .

- A. MQ cắt NP . B. $MQ \parallel NP$. C. $MQ \equiv NP$. **D. MQ, NP chéo nhau.**

Lời giải



Xét mặt phẳng (ABP) . Ta có: M, N thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng (ABP) .

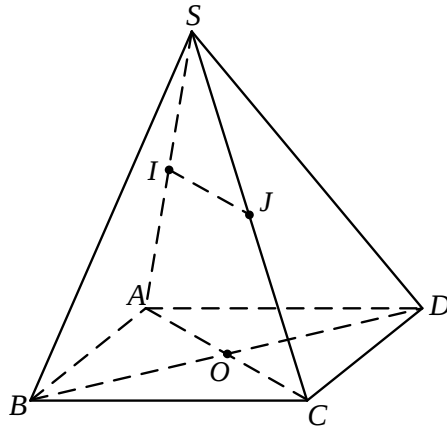
Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng $\Rightarrow MQ$ và NP chéo nhau.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC . Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

- A. BC . **B. AC .** C. SO . D. BD .

Lời giải



Dễ dàng thấy được: IJ là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow IJ \parallel AC$.

Câu 19: Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A , cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D' sao cho $BB' = 2, DD' = 4$. Tính CC' .

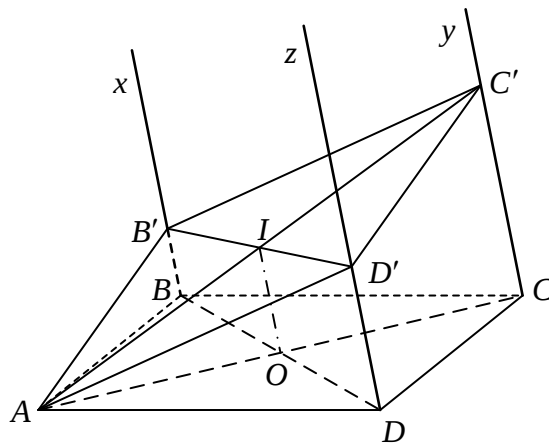
A. 6.

B. 8.

C. 2.

D. 3.

Lời giải



Ta có: $AB'C'D'$ là hình bình hành. $AC' \cap BD' = I$ và $AC \cap BD = O \Rightarrow OI$ là đường trung bình của tam giác $ACC' \Rightarrow CC' = 2OI$.

$$BB'D'D \text{ là hình thang có } OI \text{ là đường trung bình} \Rightarrow OI = \frac{BB' + DD'}{2} = 3.$$

Vậy $CC' = 6$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

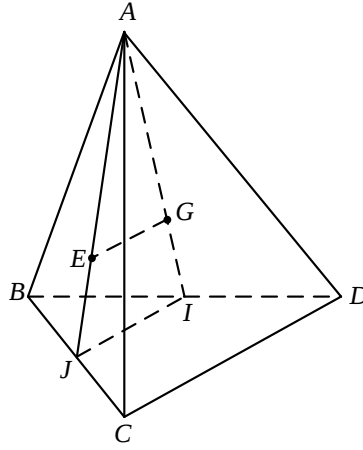
A. $GE \parallel CD$.

B. GE cắt AD .

C. GE cắt CD .

D. GE và CD chéo nhau.

Lời giải

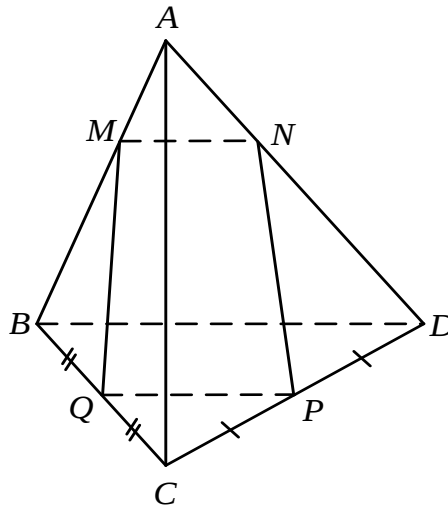


Ta có: $\frac{AG}{AI} = \frac{AE}{AJ} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG \parallel IJ$ mà $IJ \parallel CD \Rightarrow EG \parallel CD$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CB . Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.** Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.
- B.** Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
- C.** Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.
- D.** Tứ giác $MNPQ$ không có các cặp cạnh đối nào song song.

Lời giải



Xét tam giác ABD có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel BD$

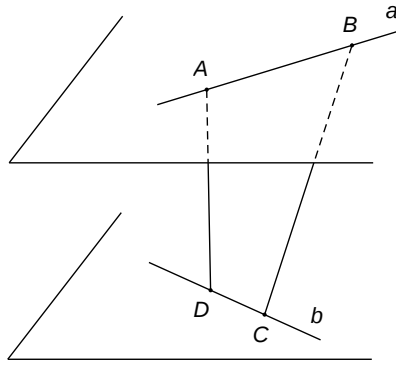
Xét tam giác BCD có: PQ là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow PQ \parallel BD$

Vậy $PQ \parallel MN \Rightarrow MNPQ$ là hình thang.

Câu 22: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A.** Có thể song song hoặc cắt nhau.
- B.** Cắt nhau.
- C.** Song song nhau.
- D.** Chéo nhau.

Lời giải



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow a$ và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a; b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I .

Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow a$ và b đồng phẳng.

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.

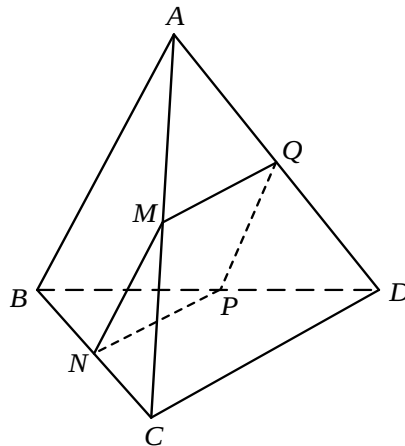
A. $AB = BC$.

B. $BC = AD$.

C. $AC = BD$.

D. $AB = CD$.

Lời giải



Xét tam giác ABC có: $MN = \frac{1}{2}AB$

Xét tam giác ABD có: $PQ = \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN = PQ$

Chứng minh tương tự, ta có: $MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình bình hành

Để $MNPQ$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = NP \Leftrightarrow AB = CD$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào không song song với $A'B'$?

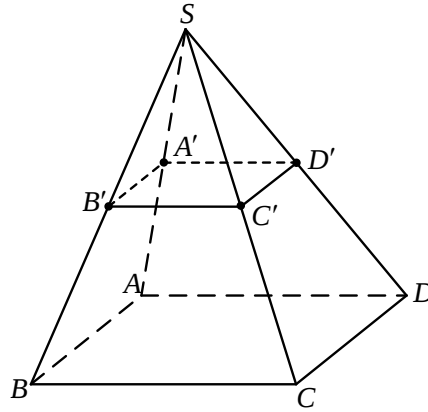
A. AB .

B. CD .

C. $C'D'$.

D. SC .

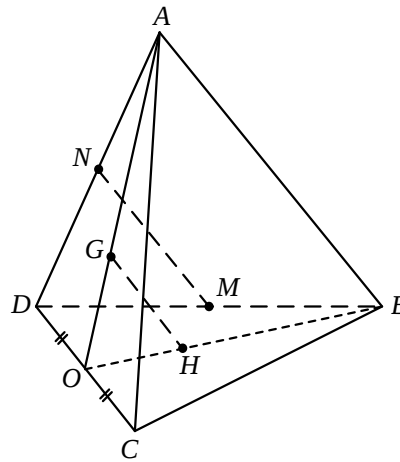
Lời giải



Do $A'B'$ và SC không đồng phẳng nên $A'B'$ và SC không song song nhau.

- Câu 25:** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD . Các điểm H, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCD; ACD$. Đường thẳng HG chéo với đường thẳng nào sau đây?
- A. MN . **B. CD .** C. CN . D. AB .

Lời giải

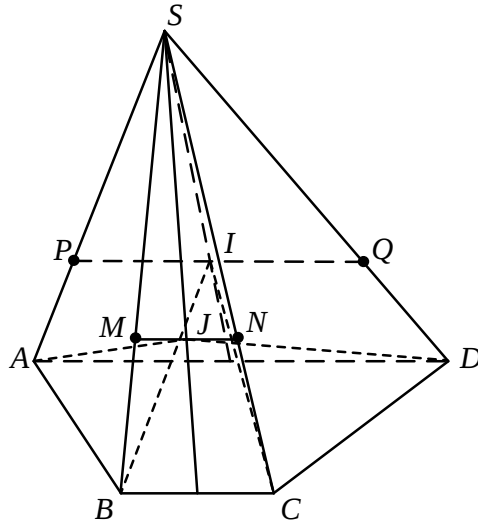


Do $\frac{OG}{OA} = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG \parallel AB$. Xét tam giác ABD có: $MN \parallel AB \Rightarrow HG \parallel MN$

Ta lại có: $HG \cap CN = G$ nên HG và CD chéo nhau.

- Câu 26:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC . Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC . Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. MN song song với PQ .** B. MN chéo với PQ .
C. MN cắt với PQ . D. MN trùng với PQ .

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN = (ADJ) \cap (SBC) \\ AD \subset (JAD); BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} PQ = (IBC) \cap (SAD) \\ AD \subset (SAD); BC \subset (IBC) \Rightarrow PQ \parallel AD \parallel BC. \text{ Vậy } MN \parallel PQ. \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết tính đúng sai của mỗi phát biểu sau (xét trong không gian):

- a) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.
- b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.
- c) Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.
- d) Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.

Lời giải

- a), b) Sai: hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể là chúng chéo nhau hoặc song song với nhau.
- c) Sai: hai đường có điểm chung thì chúng có thể cắt nhau hoặc trùng nhau.
- d) Đúng: Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau theo tính chất cơ bản.

Câu 2: Trong không gian cho ba đường thẳng a, b và c phân biệt. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- b) Nếu hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì chúng chéo nhau.
- c) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b , đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Nếu đường thẳng a cắt b , hai đường thẳng b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

a) Đúng: Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

b) Sai: Vì nếu hai đường a, c chéo nhau và hai đường b, c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng b có đến ba khả năng: chéo nhau, song song hoặc cắt nhau.

c) Đúng: Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b , đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Sai: vì đường thẳng a có thể cắt cả hai đường chéo nhau là b và c , tức là đường thẳng a có thể cắt đường thẳng c .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

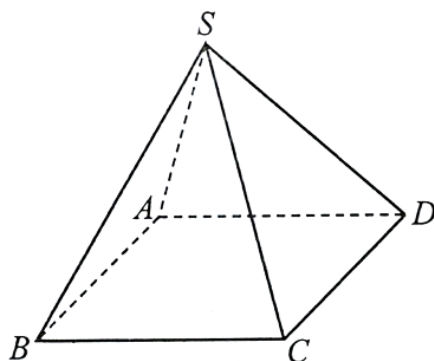
a) AB song song CD

b) SA cắt SC

c) SA song song BC .

d) SC chéo nhau AB .

Lời giải



a) Đúng: Ta có AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung nên AB song song với CD (hai cạnh đối của hình bình hành thì song song với nhau).

b) Đúng: Hai đường thẳng SA và SC cắt nhau tại S .

c) Sai: Hai đường thẳng SA và BC không đồng phẳng, vì vậy SA và BC là hai đường thẳng chéo nhau.

d) Đúng: SC chéo nhau AB .

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, BD . Gọi (P) là mặt phẳng qua I, J và cắt các cạnh AC, AD lần lượt tại hai điểm M, N . Khi đó:

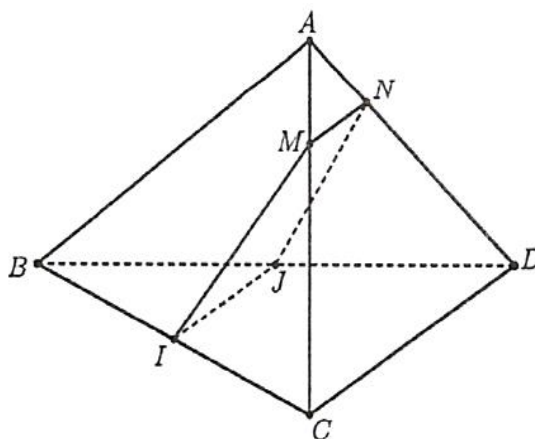
a) $IJ = \frac{1}{2}CD$

b) MN cắt DC

c) $IJNM$ là một hình thang.

d) Để $IJNM$ là hình bình hành thì M là trung điểm của đoạn AC .

Lời giải



a) Đúng: Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $IJ // CD, IJ = \frac{1}{2}CD$.

b) Sai: Khi đó:
$$\begin{cases} (P) \cap (ACD) = MN \\ IJ \subset (P), CD \subset (ACD) \Rightarrow MN // IJ // CD \text{ nên } MN \text{ song song với } CD \\ IJ // CD \end{cases}$$

c) Đúng: Khi đó:
$$\begin{cases} (P) \cap (ACD) = MN \\ IJ \subset (P), CD \subset (ACD) \Rightarrow MN // IJ // CD \text{ vì vậy } IJNM \text{ là một hình thang.} \\ IJ // CD \end{cases}$$

d) Đúng: Theo câu a) ta có: $IJ // MN$ vì vậy $IJNM$ là hình bình hành khi và chỉ khi $IJ = MN$.

Khi đó $MN = \frac{1}{2}CD, MN // CD$.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ACD hay M là trung điểm của đoạn AC .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA . Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường thẳng MN và $M'N'$ song song với nhau.

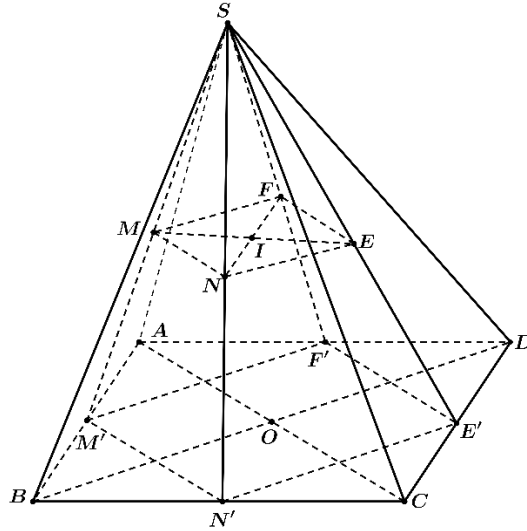
b) Hai đường thẳng MN và EF chéo nhau với nhau.

c) Hai đường thẳng MF và NE chéo nhau với nhau.

d) Tứ giác $MNEF$ là hình chữ nhật.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\frac{SM}{SM'} = \frac{2}{3}; \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} \Rightarrow MN // M'N' \quad (1).$



b) Sai: Tương tự $\frac{SE}{SE'} = \frac{SF}{SF'} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF // E'F'$ (2) và $\begin{cases} MN' // AC \\ E'F' // AC \end{cases} \Rightarrow MN' \square E'F'$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MN // EF$

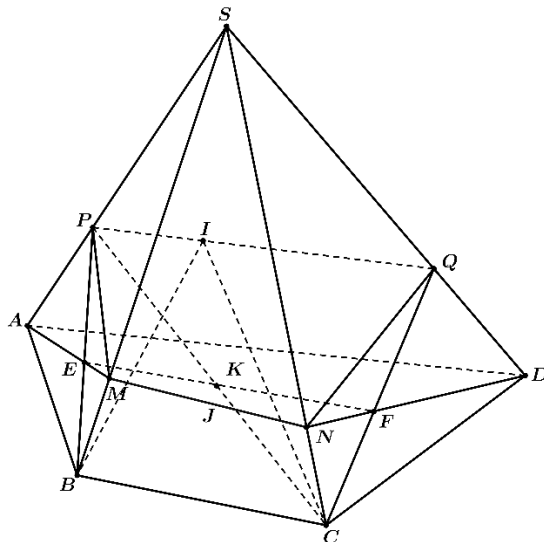
c) Đúng: Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta có $MN // MF'$; $MF' // N'E'$; $N'E' // NE$ nên $MF // NE$

d) Sai: Tứ giác $MNEF$ có $\begin{cases} MN // EF \\ MF // NE \end{cases}$ nên $MNEF$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AD . Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC . Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Hai đường thẳng AD và BC song song với nhau
- Điểm I nằm trên đường thẳng PQ
- Hai đường thẳng MN và BC chéo nhau
- Hai đường thẳng MN và PQ song song với nhau

Lời giải



a) Đúng: Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$ nên
$$\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD \parallel BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases}$$

b) Đúng: $\Rightarrow PQ \parallel AD \parallel BC$ (1) và $I \in PQ$

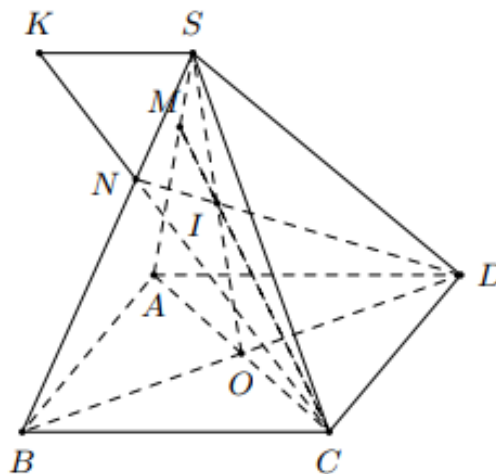
c) Sai: Tương tự $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$ nên
$$\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$$

d) Đúng: $MN \parallel AD \parallel BC$ và $J \in MN$ suy ra $MN \parallel PQ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M và N . Cho $AB = 3$ khi đó hãy tính độ dài đoạn thẳng MN .

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC) ta kéo dài CI cắt SA tại M ; trong mặt phẳng (SBD) ta kéo dài DI cắt SB tại N .

Từ O kẻ đường thẳng song song với IM , cắt SA tại H .

Tam giác SHO có I là trung điểm SO và $IM \parallel HO$ nên IM là đường trung bình của $\triangle SHO$

Suy ra M là trung điểm SH hay $SM = MH$.

Tương tự: OH là đường trung bình của tam giác ACM nên H là trung điểm của AM

Suy ra $MH = HA$.

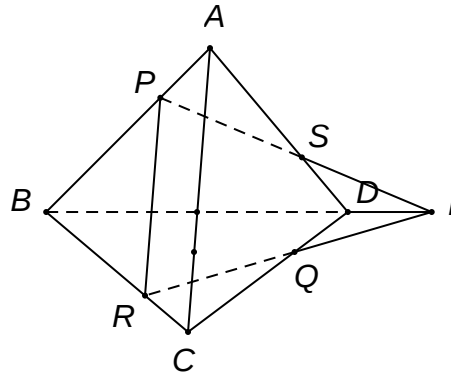
Từ đó ta được $SM = MH = HA$ nên $SM = \frac{1}{3}SA$.

Chúng minh tương tự ta cũng được: $SN = \frac{1}{3}SB$.

Áp dụng định lý Talet trong tam giác SAB ta được $MN // AB$ và $MN = \frac{1}{3}AB = 1$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR // AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Khi đó $AD = kDS$. Tìm giá trị của k .

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BD và RQ . Nối P với I , cắt AD tại S .

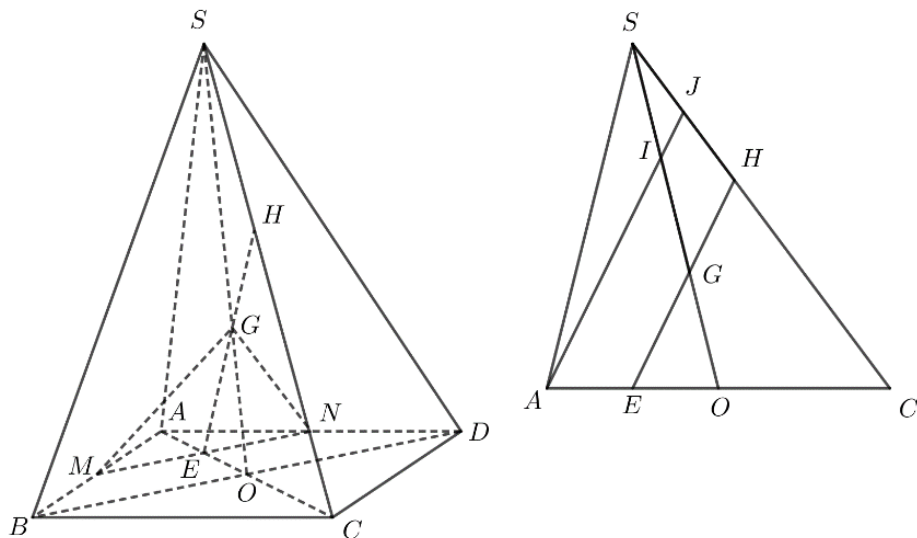
Ta có $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1$ mà $\frac{CQ}{QD} = 2$ suy ra $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{RC}{BR}$.

Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB}$.

Lại có $\frac{SA}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2 \longrightarrow AD = 3DS$ nên $k = 3$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD . Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H . Tính $\frac{SH}{SC}$

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = MN \cap AC$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $H = EG \cap SC$.

Ta có: $\begin{cases} H \in EG; EG \subset (MNG) \\ H \in SC \end{cases} \Rightarrow H = SC \cap (MNG).$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SG và SH .

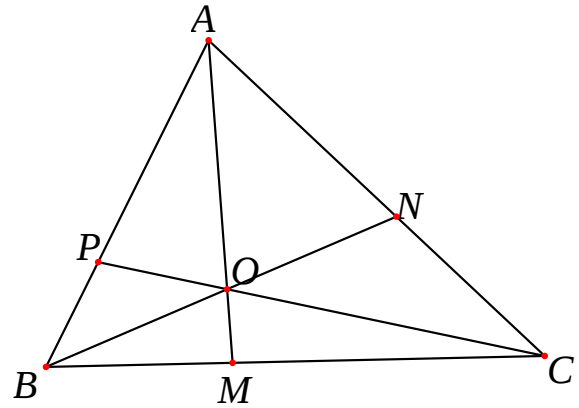
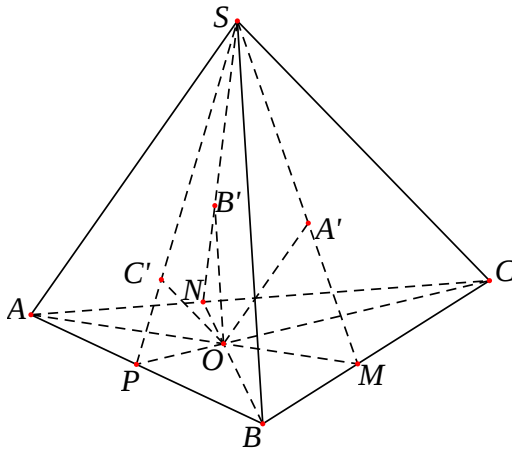
Ta có $\begin{cases} IJ \parallel HG \\ IA \parallel GE \end{cases} \Rightarrow A, I, J$ thẳng hàng

Xét $\triangle ACJ$ có $EH \parallel AJ \Rightarrow \frac{CH}{HJ} = \frac{CE}{EA} = 3 \Rightarrow CH = 3HJ$.

Lại có $SH = 2HJ$ nên $SC = 5HJ$. Vậy $\frac{SH}{SC} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ theo thứ tự tại A', B', C' . Khi đó tổng tỉ số $T = \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AO và BC , BO và AC , CO và AB .

$$\text{Ta có } \frac{OA'}{SA} = \frac{MO}{MA} = \frac{S_{CMO}}{S_{CMA}} = \frac{S_{BMO}}{S_{BMA}} = \frac{S_{CMO} + S_{BMO}}{S_{CMA} + S_{BMA}} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$$

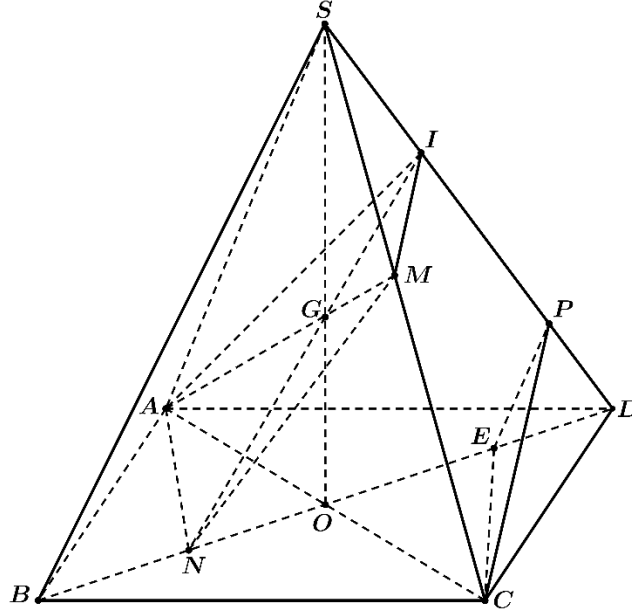
$$\frac{OB'}{SB} = \frac{NO}{NB} = \frac{S_{ANO}}{S_{ANB}} = \frac{S_{CNO}}{S_{CNB}} = \frac{S_{ANO} + S_{CNO}}{S_{ANB} + S_{CNB}} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{OC'}{SC} = \frac{PO}{PC} = \frac{S_{APO}}{S_{APC}} = \frac{S_{BPO}}{S_{BPC}} = \frac{S_{APO} + S_{BPO}}{S_{APC} + S_{BPC}} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Từ đó } T = \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, OB . Gọi I là giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN) . Khi đó tỉ số $\frac{SI}{DI} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Lời giải



Trong (SAC) gọi $G = SO \cap AM$.

Trong (SBD) gọi $I = NG \cap SD \Rightarrow I = SD \cap (AMN)$.

Trong (SCD) kẻ $CP \parallel MI$ (1) $\Rightarrow MI$ là đường trung bình của $\triangle SCP \Rightarrow SI = IP$ (3).

Trong (SBD) kẻ $PE \parallel NI$ (2) nên từ (1) và (2) $\Rightarrow (PEC) \parallel (ANMI)$.

Mà $(ABCD) \cap (CPE) = CE$ và $(ABCD) \cap (ANMI) = AN \Rightarrow CE \parallel AN \Rightarrow \frac{OE}{ON} = \frac{OA}{OC} = 1$.

$\Rightarrow OE = NO = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OD \Rightarrow E$ là trung điểm của OD và $DN = 3DE$.

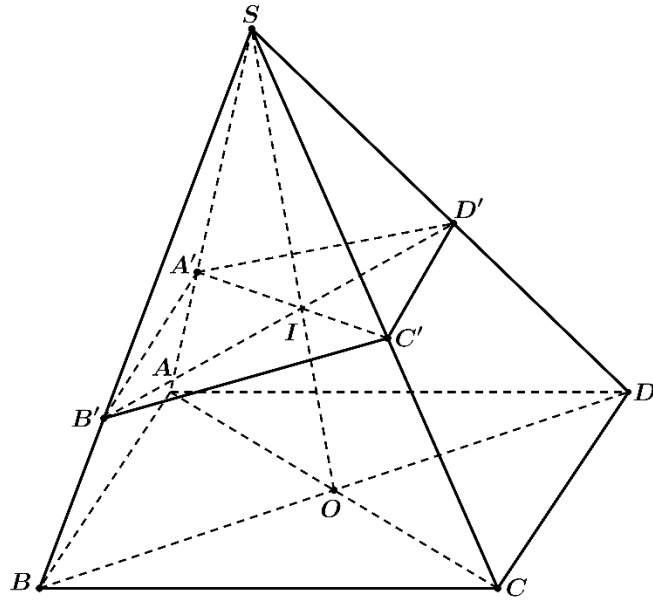
Xét $\triangle NID$ có $PE \parallel NI \Rightarrow \frac{DP}{DI} = \frac{DE}{DN} = \frac{1}{3} \Rightarrow DP = \frac{1}{3}DI \Rightarrow IP = \frac{2}{3}DI$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SI = \frac{2}{3}DI \Rightarrow \frac{SI}{DI} = \frac{2}{3}$ nên $a = 2; b = 3 \Rightarrow T = a + b = 2 + 3 = 5$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'A = \frac{1}{2}A'S$. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại C' . Mặt phẳng (α) chứa

$A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Lời giải



Gọi O là giao của AC và BD thì ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC và BD .

Các đoạn thẳng $SO, A'C', B'D'$ đồng quy tại I .

$$\text{Ta có: } S_{SA'I} + S_{SC'I} = S_{SA'C'} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAC}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SAC}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{2S_{SCO}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'}{2SA} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SC'}{2SC} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$$

$$\text{Ta có: } A'C' \parallel AC \Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

-----HẾT-----